УДК 528.92:65.011.56

КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТРАНСФОРМУВАННЯ РАСТРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Ю. Карпінський, О. Грачов
Науково-дослідний інститут геодезії та картографії
Державне науково-виробниче підприємство “Картографія”

Вступ

Створення якісних цифрових карт, які використовуються в сучасних геоінформаційних системах неможливе без використання растрових зображень.

Для забезпечення необхідної точності растрових зображень, які використовуються у ГІС, необхідна їх попередня підготовка. Найважливішим етапом такої підготовки є геометричне трансформування растрових зображень з метою усунення наслідків деформації вихідного матеріалу, апаратних похибок сканера, похибок оператора [1]. Сучасні геоінформаційні системи пропонують багато методів трансформування растрових зображень. Обрання оптимального методу трансформування становить проблему, оскільки залежить від виду картографічного матеріалу, ступеня спотворення матеріалу, вимог до точності трансформованого растрового зображення [3]. Наприклад, один з відомих пакетів, MicroStation Descartes, забезпечує трансформування растрового зображення одним з 7-ми методів. Кожен з методів працює за власним математичними апаратом, яким притаманні певні властивості [6]. Від вибору методу трансформування залежать точність трансформованого растрового зображення та час, необхідний для проведення трансформування.

Математична постановка задачі трансформування

Нехай є n точок, координати яких визначені в двох просторових системах координат: XY та UV. Такі точки мають назву опорних або суміщених. Позначимо вектор координат i-ої точки в системі координат XY як $r_i^{XY} = (x_i \quad y_i)^T$, а в системі координат UV, як $r_i^{UV} = (u_i \quad v_i)^T$, де $i = 1,2,3,...n$. Координатам i-ї точки в системах координат XY та UV відповідають коваріаційні матриці похибок $K\delta r_i^{XY}$ та $K\delta r_i^{UV}$. Якщо припустити, що похибки координат точки кожного вектора можуть корелюватися, але немає кореляції між похибками координат точок різних векторів в одній чи в різних системах координат, то вектори координат точок R^{XY} та R^{UV} набувають вигляду: $R^{XY} = \left(r_1^{XY} \quad r_2^{XY} \quad r_3^{XY} \quad ... \quad r_n^{XY}\right)^T$ та $R^{UV} = \left(r_1^{UV} \quad r_2^{UV} \quad r_3^{UV} \quad ... \quad r_n^{UV}\right)^T$ а коваріаційні матриці $K\delta R^{XY}$ та $K\delta R^{UV}$ – блочно - діагональні матриці з діагональними підблоками, тобто коваріаційними матрицями похибок координат суміщених точок.

У цьому випадку матриці $K\delta R_i^{XY}$ та $K\delta R_i^{UV}$ можна представити у вигляді: $K\delta R_i^{XY} = \left(\mu_0^{XY}\right)^2 \left(P_i^{XY}\right)^{-1}$ та $K\delta R_i^{UV} = \left(\mu_0^{UV}\right)^2 \left(P_i^{UV}\right)^{-1}$, де μ_0^{XY} та μ_0^{UV} – середні квадратичні похибки одиниць ваги координат точок; P_i^{XY} та P_i^{UV} - вагові матриці координат i - ї точки відповідно в системах координат XY та UV; діагональні елементи вагових матриць $P_i^{XY} = \{px_i \quad py_i\}$ та $P_i^{UV} = \{pu_i \quad pv_i\}$; $px_i = \frac{c}{mx_i^2}$, $py_i = \frac{c}{my_i^2}$, $pu_i = \frac{c}{mu_i^2}$, $pv_i = \frac{c}{mv_i^2}$, – ваги координат суміщених точок у системах координат XY та UV, mx_i, my_i mu_i mv_i – середні квадратичні похибки координат i - ї суміщеної точки відповідно в системах координат XY та UV. За умовами трансформування відомо, що $mu_i \succ\succ mx_i$, $mv_i \succ\succ my_i$.

За векторами координат точок R^{XY} і R^{UV} та коваріаційними матрицями $K\delta R^{XY}$ і $K\delta R^{UV}$ треба знайти параметри трансформування координат T з однієї системи координат XY в іншу UV.

Можливі рішення

Треба взяти до уваги, що до рішення поставленої задачі існує два підходи: інтерполяція і апроксимація функцій. У випадку використання глобальної інтерполяції необхідно відновити функцію F, тобто знайти таку інтерполяційну функцію φ трансформування координат, яка б наближала F на її області визначення, причому її значення у вузлах інтерполяції точно збігалося б з заданими значеннями функції F:

$$\varphi(XY) = UV. \tag{1}$$

Апроксимація забезпечує визначення такої аналітичної функції f трансформування координат, яка згладжує особливості табличної функції і також наближає F на її області визначення, причому її значення у вузлах інтерполяції не збігаються із заданими значеннями функції F:

$$f(XY) \neq UV. \tag{2}$$

У нашій задачі функція F задана таблично, що визначає точкову апроксимацію, причому використовується апроксимація за методом найменших квадратів [2]

$$v^2 = v^T pv = (\varphi(XY) - UV)^T (p)(\varphi(XY) - UV) = \min. \tag{3}$$

де $v = (v_1, v_2, \ldots v_n)^T$ вектор поправок у трансформовані координати $v_i = v_i' - v_i$, v_i'– вирівняні координати, v_i–вихідні координати.

Класифікація методів

Виконати класифікацію методів трансформування за математичним апаратом достатньо складно. В більшості класифікацій приймається розподілення всіх методів трансформування за принципом зв'язку апроксимуючої поверхні з опорними точками [5].

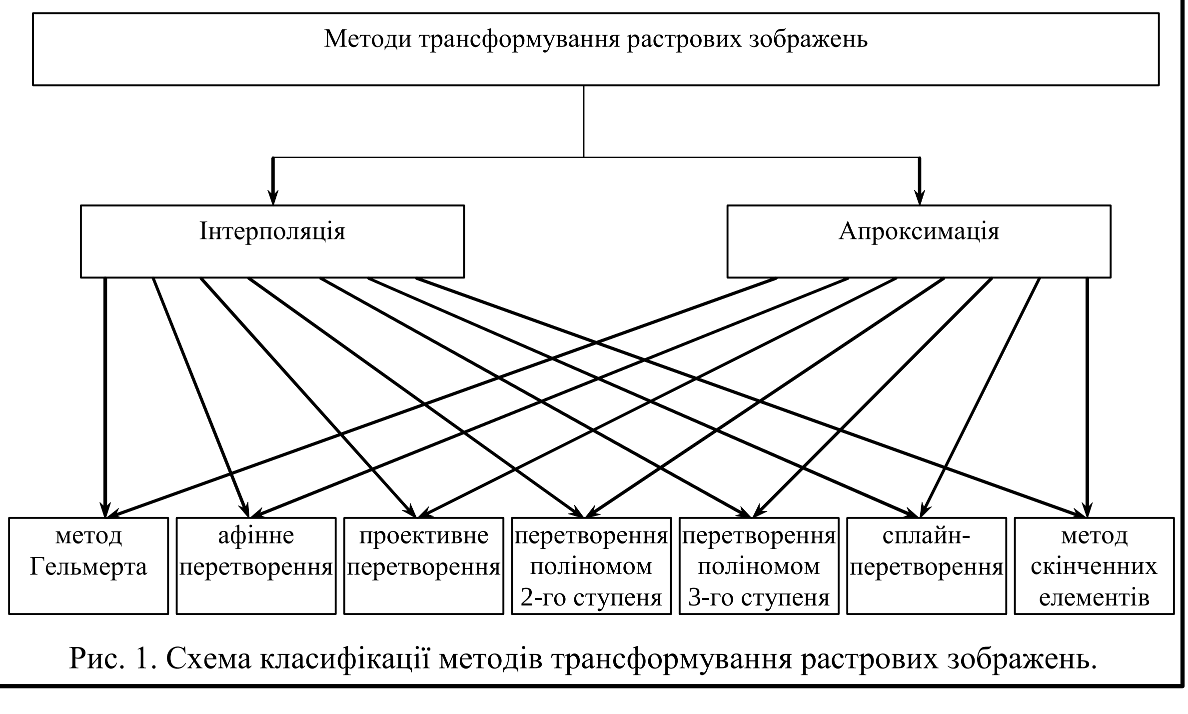

Рис. 1. Схема класифікації методів трансформування растрових зображень.

В першу групу включаються методи, в яких функція трансформування – інтерполяційна на множині n опорних точок (1). В другу групу входять методи, в яких функція трансформування апроксимує в системі координат UV координати опорних точок, які завдані в системі координат XY (2) (Рис.1).

Треба взяти до уваги, що при застосуванні будь яких інтерполяційних методів необхідно та достатньо мати певну кількість опорних точок, які забезпечують однозначне визначення параметрів трансформування. В той же час при використанні апроксимаційних методів необхідно мати надлишкові виміри, до яких застосовується процедура вирівнювання, як правило за методом найменших квадратів (3).

Властивості методів

Методом Гельмерта виконуються поворот растрового зображення, плоскопаралельний зсув растрового зображення уздовж осей X та Y, масштабування растрового зображення, при якому масштабні коефіцієнти уздовж осей X та Y рівні (Рис. 2).

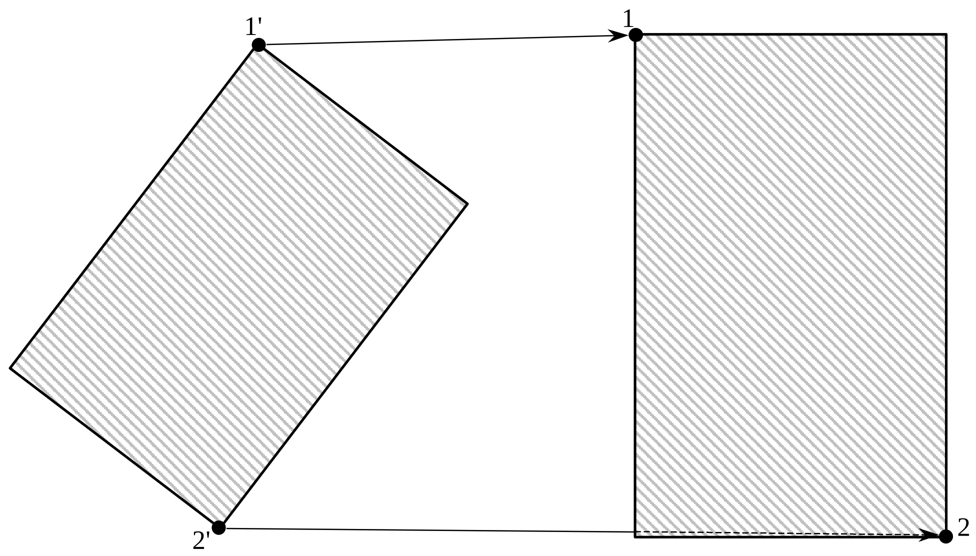

Рис. 2. Перетворення Гельмерта.

Перетворення координат з системи координат XY до UV методом Гельмерта відбувається за формулою: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, де u, v - трансформовані координати точки, m - масштабний коефіцієнт, θ - кут повороту системи координат u, v відносно x, y, x, y - вихідні координати точки, x_0, y_0 - координати початку системи координат x, y в системі координат u, v.

Отже метод Гельмерта вимагає визначення чотирьох невідомих параметрів $F = \varphi(x_0 \quad y_0 \quad \theta \quad m)$. Для трансформування інтерполяційним методом необхідно і достатньо визначити параметри Гельмерта по 2-х опорних точках. Для трансформування апроксимацією кількість опорних точок повинна бути більше ніж 2, при цьому кількість надлишкових вимірів дорівнюватиме $2n-4$.

Треба зазначити, що трансформування за методом Гельмерта є конформним, що забезпечує перетворення фігури, сформованої суміщеними точками з XY, у подібну в UV, при якому кути зберігаються, а довжини відповідних ліній в системах координат UV та XY пропорційні. Трансформування методом Гельмерта, як правило, виконується у випадку невеликої кількості суміщених точок, та не може забезпечити високої точності трансформування.

Методом афінного перетворення виконуються: поворот растрового зображення, плоскопаралельний зсув растрового зображення уздовж осей X та Y, масштабування растрового зображення, при якому масштабні коефіцієнти уздовж осей X та Y неоднакові, зміна конформності растрового зображення (Рис. 3).

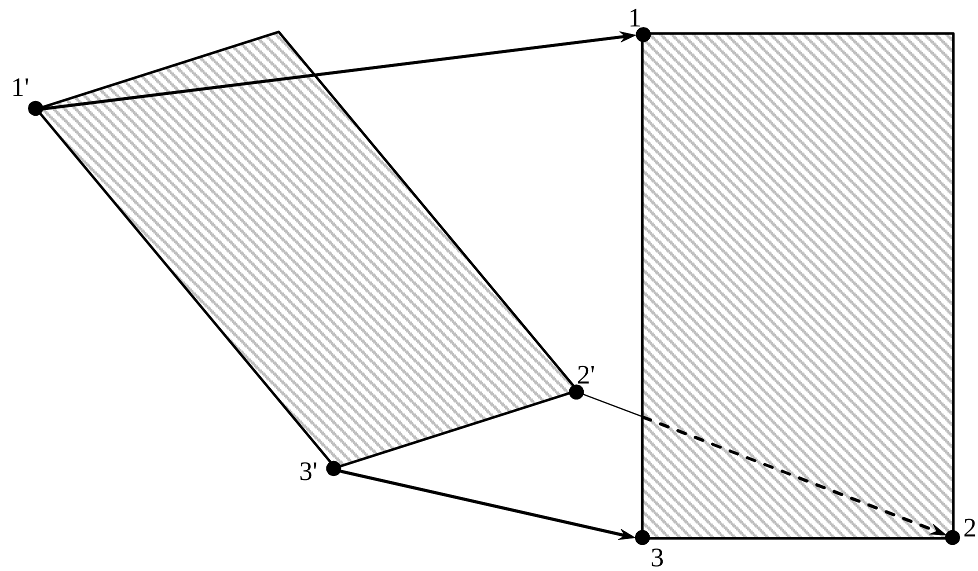

Рис. 3. Афінне перетворення.

Перетворення координат з системи координат XY до UV методом афінного перетворення відбувається за формулою: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x \cos\theta_x & m_y \sin\theta_y \\ m_x \sin\theta_x & m_y \cos\theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, де u, v - трансформовані координати точки, m_x, m_y - масштабні коефіцієнти, θ_x, θ_y - кути повороту системи координат u, v відносно x, y, x, y - вихідні координати точки, x_0, y_0 - координати початку системи координат x, y в системі координат u, v.

Метод афінного перетворення вимагає визначення шести невідомих параметрів $F = \varphi(x_0 \quad y_0 \quad m_x \quad m_y \quad \theta_x \quad \theta_y)$. Для трансформування інтерполяційним методом необхідно і достатньо визначити параметри афінного трансформування по 3-х опорних точках. Для трансформування апроксимаційним методом афінного перетворення, кількість опорних точок повинна бути більше ніж 3, при цьому кількість надлишкових вимірів дорівнюватиме $2n-6$.

При афінному перетворенні, лінії, які були паралельними в системі координат XY, перетворюються у паралельні лінії в системі координат UV. Трансформування методом афінного перетворення, як правило, виконується у випадку достатньої кількості суміщених точок.

Методом проективного перетворення виконується проективне перетворення однієї плоскої фігури у іншу (Рис. 4).

Перетворення координат з системи координат XY до UV методом проективного перетворення відбувається за формулою:

$$u = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{dx + ey + 1}$$
$$v = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{dx + ey + 1}$$

де u, v – трансформовані координати точки, x, y – вихідні координати точки, a_i, b_i, c_i, d, e – коефіцієнти.

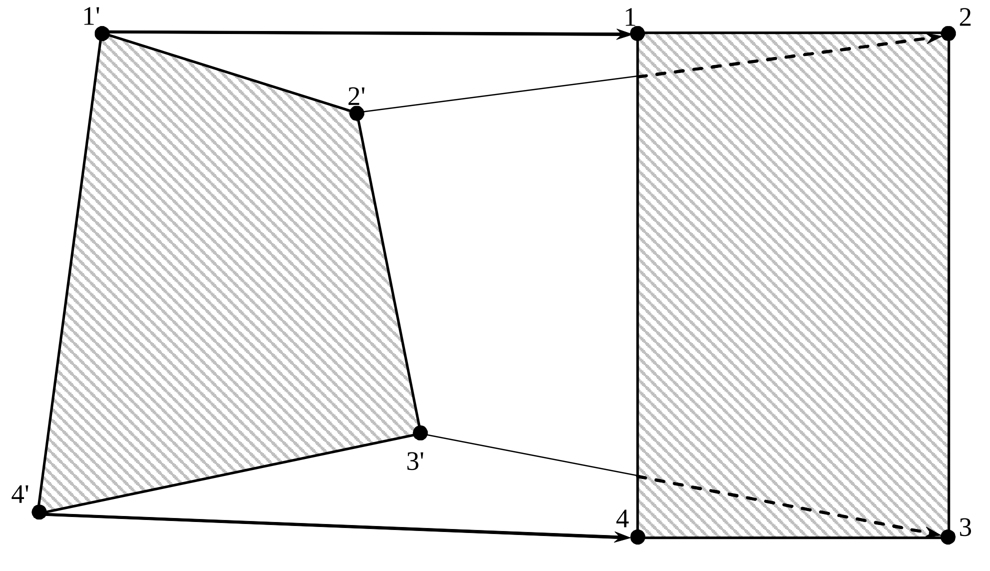

Рис. 4. Проективне перетворення.

Метод проективного перетворення вимагає визначення восьми невідомих параметрів $F=\varphi(a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2 \quad d \quad e)$. Для проективного трансформування інтерполяційним методом необхідно і достатньо визначити параметри проективного трансформування по 4-х опорних точках. Для трансформування апроксимаційним методом проективного перетворення, кількість опорних точок повинна бути більше ніж 4, при цьому кількість надлишкових вимірів дорівнюватиме $2n-8$.

Трансформування методом проективного перетворення застосовується до растрових зображень, які мають значні спотворення, здебільшого проективного характеру, при наявності достатньої кількості опорних точок.

Методом перетворення поліномом 2-го ступеня виконується нелінійне перетворення однієї плоскої фігури у іншу (Рис. 5).

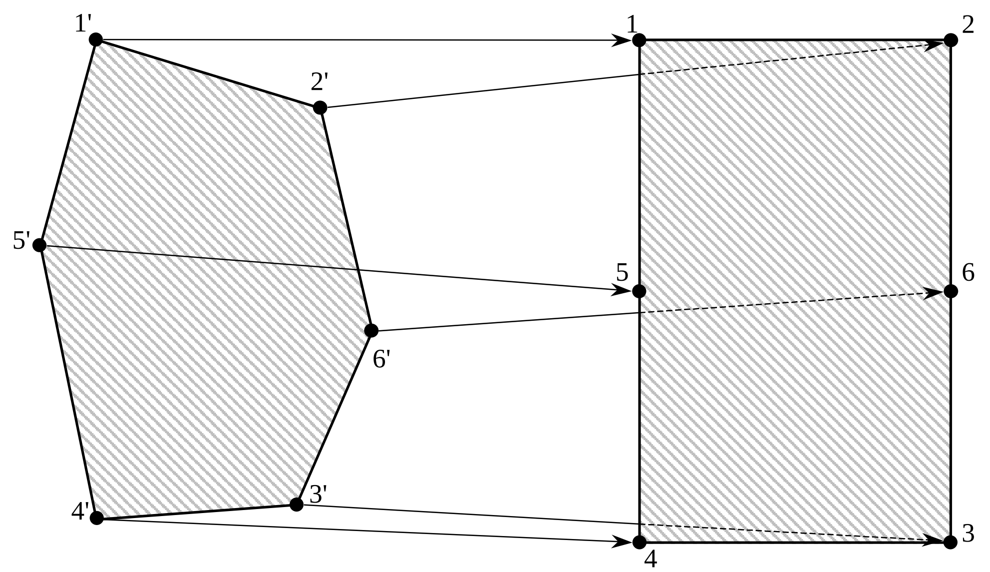

Рис. 5. Перетворення поліномом 2-го ступеня.

Перетворення координат методом полінома 2-го ступеня відбувається за формулами:

$$u = a_5x^2 + a_4y^2 + a_3xy + a_2x + a_1y + a_0$$
$$v = b_5x^2 + b_4y^2 + b_3xy + b_2x + b_1y + b_0$$
де: u, v - трансформовані координати точки, x, y - вихідні координати точки, a_i, b_i - коефіцієнти полінома.

Метод перетворення поліномом 2-го ступеня вимагає визначення дванадцяти невідомих параметрів $F = \varphi(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5)$.

Для побудови інтерполяційного поліному другого ступеня необхідно і достатньо визначити параметри проективного трансформування по 6-и опорних точках. Для побудови апроксимаційного поліному другого ступеня, кількість опорних точок повинна бути більше ніж 6, при цьому кількість надлишкових вимірів дорівнюватиме $2n - 12$.

Методом перетворення поліномом 3-го ступеня виконується нелінійне перетворення однієї плоскої фігури у іншу (Рис. 6).

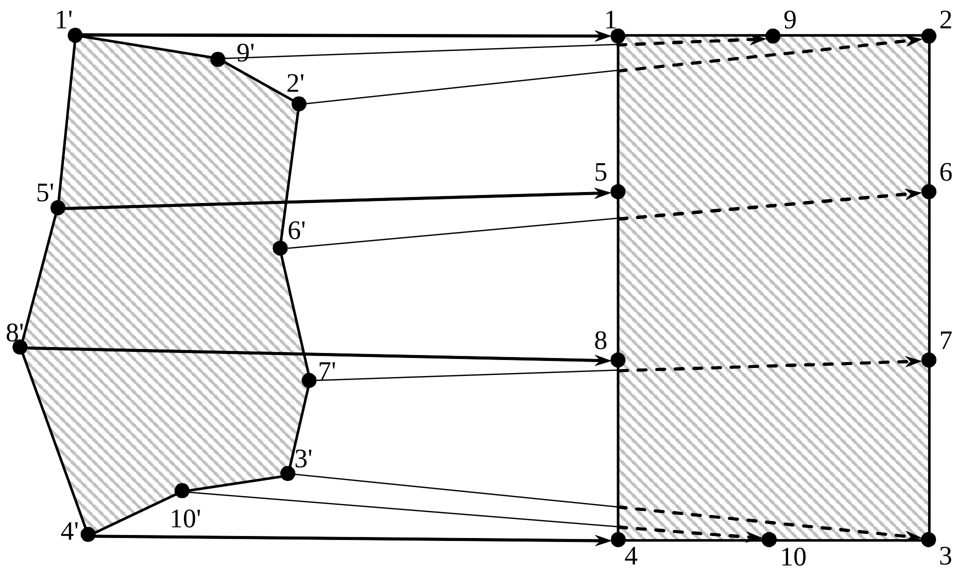

Рис. 6. Перетворення поліномом 3-го ступеня.

Перетворення координат методом проективного перетворення відбувається за формулами:
$$u = a_9x^3 + a_8y^3 + a_7x^3y^3 + a_6x^2 + a_5y^2 + a_4x^2y^2 + a_3x + a_2y + a_1xy + a_0$$
$$v = b_9x^3 + b_8y^3 + b_7x^3y^3 + b_6x^2 + b_5y^2 + b_4x^2y^2 + b_3x + b_2y + b_1xy + b_0$$
, де: u, v - трансформовані координати точки, x, y - вихідні координати точки, a_i, b_i - коефіцієнти полінома.

Метод перетворення поліномом 2-го ступеня вимагає визначення двадцяти $F = \varphi(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8 \quad b_9)$ невідомих параметрів.

Для побудови інтерполяційного поліному третього ступеня необхідно і достатньо визначити параметри проективного трансформування по 10-и опорних точках. Для побудови апроксимаційного поліному третього ступеня, кількість опорних точок повинна бути більше ніж 10, при цьому кількість надлишкових вимірів дорівнюватиме $2n - 20$.

Трансформування растру методами побудови поліномів другого чи третього ступеня виконується при наявності значних нелінійних спотворень растрового зображення та великої кількості опорних точок, оскільки побудова інтерполяційного поліному, як правило, не забезпечує достатньої точності трансформованого растрового зображення оскільки спотворення виправляються найкраще поблизу опорних точок, залишаючись із значною величиною на ділянках де густина опорних точок низька.

Метод інтерполяції кубічним сплайном

Кубічний сплайн, як кусково безперервна функція характеризується мінімальною кривиною, точно повертає координати опорних точок.

Властивості інтерполяції кубічним сплайном та його побудова розглянуті в [4].

Характеристичний інтеграл методу інтерполяції кубічним сплайном має вигляд:

$$\int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{d^{\,p-1}\varphi}{dx^{p-1}} \right)^2 dx = \min$$

Метод скінченних елементів

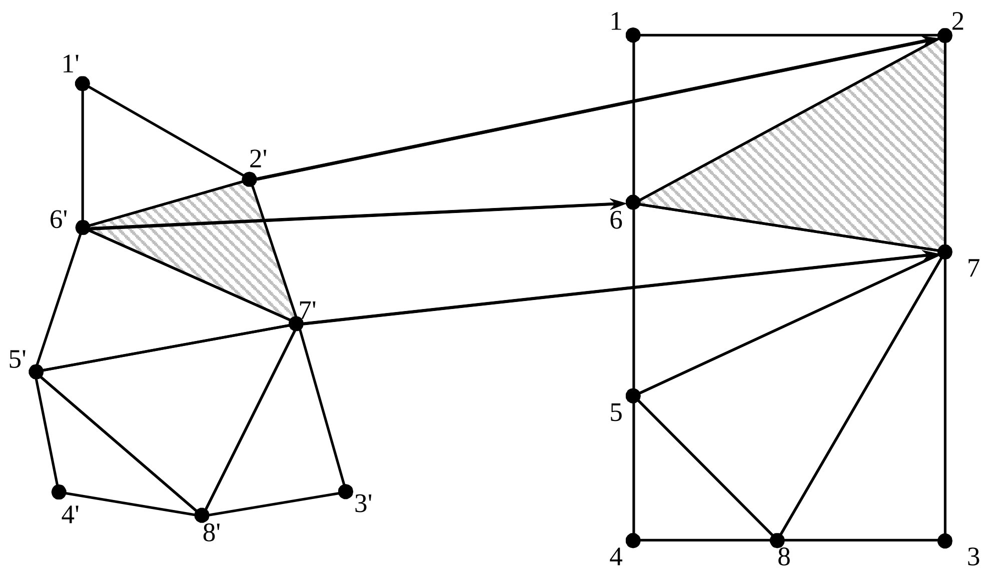

Рис. 7. Перетворення за методом скінченних елементів.

За методом скінченних елементів вхідне растрове зображення розчленовується на скінченні елементи – трикутники (Рис. 7). Вершинами окремих трикутників є опорні точки. Для розчленування всієї області на трикутні скінченні елементи, до опорних точок можна застосувати відомий спосіб тріангулювання Делоне.

Кожний скінченний елемент трансформується методом афінного перетворення. Оскільки суміжні трикутники мають загальну сторону, яка спирається на дві опорні точки з координатами, наприклад: x_1, y_1 та x_2, y_2, після перетворення тим самим точкам відповідатимуть координати u_1, v_1 та u_2, v_2,. Два суміжних трикутника після перетворення матимуть так само загальну сторону, отже розривів на вихідному растровому зображенні в системі координат u, v не буде. При цьому, якщо спотворення на вхідному растровому зображенні неоднакові на різних ділянках растру, то метод скінченних елементів забезпечує локалізацію спотворень, не допускаючи впливу спотворень однієї ділянки на інші.

Висновки

Сучасні ГІС пакети дозволяють використовувати різноманітні методи трансформування растрових зображень, які досліджуються в цій статті. Очевидно, що свідомий вибір методу-претендента для трансформування растрового зображення має проводитись на основі точного знання його властивостей і поставленої мети трансформування.

Якщо для суміщених точок відомі точні значення координат у глобальній системі UV, то доцільним є використання методів, які основані на інтерполяційних функціях. Якщо координати у двох системах XY та UV відомі із співрозмірними похибками, то доцільним є використання методів, які основані на апроксимаційних функціях.

Література

1. Карпінський Ю.О., Грачов О.Г. Трансформування растрових моделей цифрових карт і планів. //Вісник геодезії та картографії.-2001.-№1.-С. 22-25.
2. Карпінський Ю.О. Афінне трансформування координат методом скінченних елементів. //Вісник геодезії та картографії.-2002.-№4.-С. 23-27.
3. Вахтанов А. С. Обработка растровых изображений при обновлении топографических карт. //Геодезия и картография.-2002.-№9.-С. 37-46.
4. Журкин И.Г., Нейман Ю.М. Методы вычислений в геодезии: Учебное пособие.-М: Недра, 1988.-304 с.
5. Лисицкий Д.В. Основные принципы цифрового картографирования местности.-М.: Недра, 1988.-261 с.
6. MicroStation Descartes: User Guide-Bentley Systems, Inc.-2000.-409 pp.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. Карпинский, А. Грачёв

Рассматриваются свойства и классификация методов интерполирования и аппроксимации функций трансформирования растровых изображений в геоинформационных системах. Отмечается, что интерполяционные методы трансформирования целесообразно применять, если известны точные значения глобальных координат опорных точек, и наоборот, применение методов аппроксимации обеспечивают трансформирование по опорным точкам, точные значения которых неизвестны.

CLASSIFING METHODS OF INTERPOLATION AND APROXIMATION OF FUNCTIONS OF TRANSFORMING OF RASTER IMAGES

Y. Karpinskyy, O. Grachev

Considered properties and classifying of methods of interpolation and approximation of raster images transforming functions applies in GIS. Noted that interpolation methods expediently applies, when exact coordinates of control points known, and in other way, approximation uses when exact coordinates of control points are not known.