УДК 528.14/16

Ю.О. Карпінський

АФІННЕ ТРАНСФОРМУВАННЯ КООРДИНАТ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Вступ. Проблема трансформування координат точок з однієї системи координат в іншу лишається однією з найважливіших у геодезичній практиці. Вона досить часто виникає при підключенні міських або інженерних геодезичних мереж до Державної геодезичної мережі. Побудова будівельних сіток забезпечує не тільки розпланування основних осей об'єктів будівництва, а й виконання топографічних знімань, які виконуються, як правило, не в будівельній системі координат, а в державній, або похідній від неї, що вимагає встановлення зв'язку між ними.

Особливої актуальності ця проблема набуває нині. Використання GPS – вимірювань при побудові геодезичних мереж спричинило створення нових схем і методів побудови та обробки геодезичних мереж. Тому в більшості країн Європи формуються нові національні референцні геодезичні системи [9,10]. Побудова такої системи – тривалий і трудомісткий процес, в ході якого співіснують стара і нова системи протягом кількох десятиліть. Треба зауважити, що підвищення рівня інформаційної і технологічної інфраструктури геодезичного виробництва зумовлює необхідність адекватного удосконалення використання комп'ютерних високоточних математичних методів трансформування координат з однієї системи в іншу.

Параметри трансформування координат із системи в систему обираються за суміщеними точками, координати яких визначені в обох системах. Якість такого трансформування залежить від щільності суміщених точок, їх точнісних характеристик та просторового розташування і розподілу. Якщо кількість та щільність суміщених точок в області, що трансформується, незначна, то вимоги до точності методів трансформування підвищуються. Вибір методів трансформування залежить від властивостей отриманих результатів. Він має забезпечувати досягнення мети, з якою проводиться перетворення координат.

Вимоги до трансформування координат. Характеристичною ознакою всіх приведених прикладів трансформування є те, що точності характеристики координат суміщених точок у різних системах координат значно різняться. Як правило, точність визначення координат точок інженерно-геодезичних мереж , будівельних сіток в умовних системах координат значно вища, ніж точність координат точок Державної геодезичної мережі, до якої вони прив'язуються. Аналогічна проблема виникає і при трансформуванні координат точок з державної геодезичної системи СК-42 у світову геодезичну систему WGS-84. Похибки визначення взаємного положення координат точок Державної геодезичної мережі у СК-42 на відстані 50-100 км можуть досягати 1 м і більше, тоді як аналогічні похибки координат точок, визначених із застосуванням супутникових радіонавігаційних систем GPS і ГЛОНАС, не перевищують 5-10 см.

З урахуванням точності визначення координат точок в різних системах координат можна висунути такі вимоги до трансформування координат:

1. *Негомогенність трансформування.* Вона полягає в тому, що добираються такі параметри трансформування, в яких коефіцієнти зміни масштабу по кожній осі координат різні, що визначає неоднорідність систем координат. При цьому в результаті перетворення перерахованим координатам суміщених точок вхідної системи точно встановлюються значення координат точок вихідної системи.
2. *Неперервність (континуальність) трансформування*. Вона полягає в тому, що, точка, яка лежить на межі областей в одній системі координат, трансформується в точку, яка так само лежатиме на межі цих же областей, причому її місцеположення буде однаковим при використанні параметрів трансформування однієї чи іншої області;

3. точки, які лежать на межі областей в одній системі координат, трансформуються в точки, які так само лежатимуть на межі областей в іншій системі координат, незалежно від параметрів трансформування тієї чи іншої області;

4. *Незалежність локального трансформування,* яке забезпечує послідовне локальне уточнення параметрів трансформування в областях, де щільність суміщених точок зростає. Причому параметри трансформування в інших областях залишаються незмінними.

Математична постановка задачі. Нехай є n фізичних точок, координати яких визначені в двох просторових системах координат: XYZ та UVW. Позначимо вектор координат i-ої точки в системі координат XYZ як $r_i^{XYZ} = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix}^T$, а в системі координат UVW як $r_i^{UVW} = \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i \end{pmatrix}^T$, де $i = 1,2,3,\ldots n$. Координатам i-ї точки в системах координат XYZ та UVW відповідають коваріаційні матриці похибок $K\delta r_i^{XYZ}$ та $K\delta r_i^{UVW}$. Якщо припустити, що похибки координат точки кожного вектора можуть корелюватися, але немає кореляції між похибками координат точок різних векторів в одній чи в різних системах координат, то вектори координат точок R^{XYZ} та R^{UVW} набувають вигляду:

$$R^{XYZ} = \begin{pmatrix} r_1^{XYZ} & r_2^{XYZ} & r_3^{XYZ} & \ldots & r_n^{XYZ} \end{pmatrix}^T; \tag{1}$$

$$R^{UVW} = \begin{pmatrix} r_1^{UVW} & r_2^{UVW} & r_3^{UVW} & \ldots & r_n^{UVW} \end{pmatrix}^T, \tag{2}$$

а коваріаційні матриці $K\delta R^{XYZ}$ та $K\delta R^{UVW}$

$$K\delta R^{XYZ} = \begin{pmatrix} K\delta r_1^{XYZ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K\delta r_2^{XYZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K\delta r_3^{XYZ} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K\delta r_n^{XYZ} \end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$K\delta R^{UVW} = \begin{pmatrix} K\delta r_1^{UVW} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K\delta r_2^{UVW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K\delta r_3^{UVW} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K\delta r_n^{UVW} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $K\delta R^{XYZ}$ та $K\delta R^{UVW}$ - блочно - діагональна матриця з діагональними під блоками, тобто коваріаційними матрицями похибок координат суміщених точок

$$K\delta r_i^{XYZ} = \begin{pmatrix} K\delta x_i^{XYZ} & 0 & 0 \\ 0 & K\delta y_i^{XYZ} & 0 \\ 0 & 0 & K\delta z_i^{XYZ} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$K\delta r_i^{UVW} = \begin{pmatrix} K\delta x_i^{UVW} & 0 & 0 \\ 0 & K\delta y_i^{UVW} & 0 \\ 0 & 0 & K\delta z_i^{UVW} \end{pmatrix} \quad (6)$$

У цьому випадку матриці $K\delta R_i^{XYZ}$ та $K\delta R_i^{UVW}$ можна представити у вигляді: $K\delta R_i^{XYZ} = \left(\mu_0^{XYZ}\right)^2 \left(P_i^{XYZ}\right)^{-1}$ та $K\delta R_i^{UVW} = \left(\mu_0^{UVW}\right)^2 \left(P_i^{UVW}\right)^{-1}$, де μ_0^{XYZ} та μ_0^{UVW} — середні квадратичні похибки одиниць ваги координат точок; P_i^{XYZ} та P_i^{UVW} — вагові матриці координат i - ї точки відповідно в системах координат XYZ та UVW; діагональні елементи вагових матриць $P_i^{XYZ} = \{px_i \quad py_i \quad pz_i\}$ та $P_i^{UVW} = \{pu_i \quad pv_i \quad pw_i\}$; $px_i = \dfrac{c}{mx_i^2}$, $py_i = \dfrac{c}{my_i^2}$, $pz_i = \dfrac{c}{mz_i^2}$, $pu_{ii} = \dfrac{c}{mu_i^2}$, $pv_i = \dfrac{c}{mv_i^2}$, $pw_i = \dfrac{c}{mw_i^2}$ — ваги координат суміщених точок у системах координат XYZ та UVW, mx_i, my_i mz_i mu_i mv_i mw_i — середні квадратичні похибки координат i - ї суміщеної точки відповідно в системах координат XYZ та UVW. За умовами трансформування відомо, що $mx_i \succ\succ mu_i$, $my_i \succ\succ mv_i$, $mx_i \succ\succ mw_i$.

За векторами координат точок R^{XYZ} і R^{UVW} та коваріаційними матрицями $K\delta R^{XYZ}$ і $K\delta R^{UVW}$ треба знайти параметри трансформування координат T з однієї системи координат XYZ в іншу UVW.

Можливі рішення. Треба взяти до уваги, що до рішення поставленої задачі існує два підходи: інтерполяція і апроксимація функцій. У випадку використання глобальної інтерполяції необхідно відновити функцію F, тобто знайти таку інтерполяційну функцію φ трансформування координат, яка б наближала F на її області визначення, причому її значення у вузлах інтерполяції точно збігалося б з заданими значеннями функції F:

$$\varphi(XYZ) = UVW. \quad (8)$$

Апроксимація забезпечує визначення такої аналітичної функції f трансформування координат, яка згладжує особливості табличної функції і також наближає F на її області визначення, причому її значення у вузлах інтерполяції не збігаються із заданими значеннями функції F:

$$\varphi(XYZ) \neq UVW. \quad (9)$$

У нашій задачі функція F задана таблично, що визначає точкову апроксимацію, причому здебільшого використовується апроксимація за методом найменших квадратів

$$\|v\|^2 = v^T v = \left(\varphi(XYZ) - UVW\right)^T \left(\varphi(XYZ) - UVW\right) = \min, \quad (10)$$

де $\|v\|$ - норма вектору v.

Існує багато функцій трансформування координат з однієї системи в іншу. Серед них варто назвати такі:

- трансформування за методом Молоденського[8];
- поліноміальне трансформування[2,8];
- трансформування за методом Гельмерта [2,8];
- афінне трансформування [9,10];

- метод колокації [3];
- афінне трансформування методом скінченних елементів [5,7,9,10].

Трансформування координат за методом Молоденського та поліноміальне трансформування, відоме ще як метод множинної регресії, докладно розглянуто в працях [8,9]

Трансформування за методом Гельмерта в просторових прямокутних координатах від системи координат XYZ до UVW виконується за сімома параметрами: $T_H = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \theta_x & \theta_y & \theta_z & m \end{pmatrix}^T$, де T — вектор параметрів трансформування; $x_0, y_0, z_0,$ — координати початку системи координат UVW в системі координат XYZ; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — кути поворотів осей координат OU, OV, OW навколо осей OX, OY, OZ та m - масштабний коефіцієнт довжин ліній при переході від системи координат XYZ до системи UVW. Втім трансформування за Гельмертом є конформним, характеристичною ознакою, якого є те, що фігура, яка утворена суміщеними точками, перетворюється тільки у подібну фігуру, зберігаючи кути фігури,

Таким чином в результаті трансформування точки вхідної системи координат перейдуть у точки вихідної системи координат тільки за умови "ідеального трансформування", коли координати суміщених точок в обох системах координат не спотворені ніякими похибками. Очевидно, що використання трансформування за Гельмертом не забезпечує вимогу 1 про негомогенність трансформування.

Афінне трансформування в просторових прямокутних координатах від системи координат XYZ до системи UVW виконується за дев'ятьма параметрами $T_A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \theta_x & \theta_y & \theta_z & m_x & m_y & m_z \end{pmatrix}$, де замість одного масштабного коефіцієнта m визначаються три — m_x, m_y, m_z по всіх осях простору, що забезпечують необхідні умови для негомогенності трансформування. Афінне трансформування можна представити у вигляді:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де a_{ij} - коефіцієнти трансформування.

З іншого боку треба враховувати, що для визначення параметрів трансформування необхідно мати не менш трьох суміщених точок в обох системах координат, які не лежать на одній прямій. Якщо суміщених точок більше, то виникає задача вирівнювання параметрів трансформування і задача визначення параметрів перетворюється на задачу апроксимації, що обов'язково приводить до порушення умов виразу (7) та про негомогенність трансформування. Останнє зауваження стосується всіх методів, в яких кількість надлишкових вимірів r більше 1: $r = m - n$, де $m = 3k$, а k — кількість суміщених точок; n — кількість параметрів трансформування.

Використання колокації як варіаційного узагальнення інтерполяції вимагає окремого дослідження і в цій роботі не розглядається.

Афінне трансформування скінченними елементами. Поставлену задачу перетворення координат ефективно можна розв'язати афінним трансформуванням скінченними елементами. Розглянемо задачу трансформування координат у двовимірному полі. Афінне трансформування будь якої точки з однієї системи XOY координат до іншої UOV можна представити у вигляді:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x \cos\theta_x & m_y \sin\theta_y \\ m_x \sin\theta_x & m_y \cos\theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Для визначення шести коефіцієнтів перетворення: $x_0, y_0, \theta_x, \theta_y, m_x, m_y$ необхідно і достатньо мати координати трьох суміщених точок, які не лежать на одній прямій. Ці три точки утворюють трикутник. Якщо кількість суміщених точок більше трьох, то всю область, задану суміщеними точками, слід поділити на скінченні елементи – трикутники, вершинами яких є суміщені точки, що утворюють TIN - модель (Triangulated Irregular Network). Часто використовується розчленування області на трикутники методом Делоне [4]. Тріангуляція Делоне добре збалансована: її трикутники спрямовуються до рівнокутних, а система трикутників завжди має опуклу границю [9]. Однак використання тріангулювання методом Делоне для цієї задачі не є оптимальним. Кращим рішенням було б свідоме розчленування на трикутники на основі поглибленого аналізу геодезичної мережі. Після поділу області на скінченні елементи — трикутники, для кожного трикутника на основі рівняння (12) складається та розв’язується лінійна система з шести рівнянь з шістьма невідомими: $x_0, y_0, \theta_x, \theta_y, m_x, m_y$. Трансформування (12) можна отримати через лінійні базисні функції трикутного скінченого елементу[6,7]. Знайдені параметри трансформування використовуються тільки для тих точок, які належать даному скінченному елементу – трикутнику.

Для афінного трансформування методом скінченних елементів характерні такі властивості:

- визначення параметрів трансформування для кожного трикутника залежить тільки від координат вершин трикутника;
- при трансформуванні координат кожна точка (вершина трикутника) в одній системі координат точно “переходить” в ідентичну точку (вершину трикутника) в іншій системі координат;
- трансформування є неперервним, оскільки точки, які лежать на ребрах трикутників в одній системі координат трансформуються в точки, які лежать на ребрах перетворених трикутників в іншій системі координат, незалежно від того, які при цьому використовувались параметри трансформування суміжних трикутників;
- збільшення кількості та щільності суміщених точок у деяких областях викликає тільки локальне уточнення параметрів трансформування, причому параметри трансформування в інших областях залишаються незмінними.

Очевидно, що вказані характеристичні властивості афінного трансформування методом скінченних елементів повністю задовольняють всі вимоги, що їх висувають до трансформування координат.

Числовий експеримент з визначення параметрів трансформування координат із державної геодезичної системи у світову систему WGS-84. Числовий експеримент з визначення параметрів трансформування координат проведено у науково-дослідному інституті геодезії і картографії. Для цього використано наявні суміщені пункти Державної геодезичної мережі в системі СК-42 та WGS-84, з яких по чотирнадцяти пунктах визначено параметри трансформування, по інших пунктам проводилась оцінка точності трансформування аналогічно тому, як це було обраховано методом Гельмерта в праці [8].

Поділ на скінченні елементи області, утвореної Державною геодезичною мережею, здійснено методом Делоне (див. малюнок).

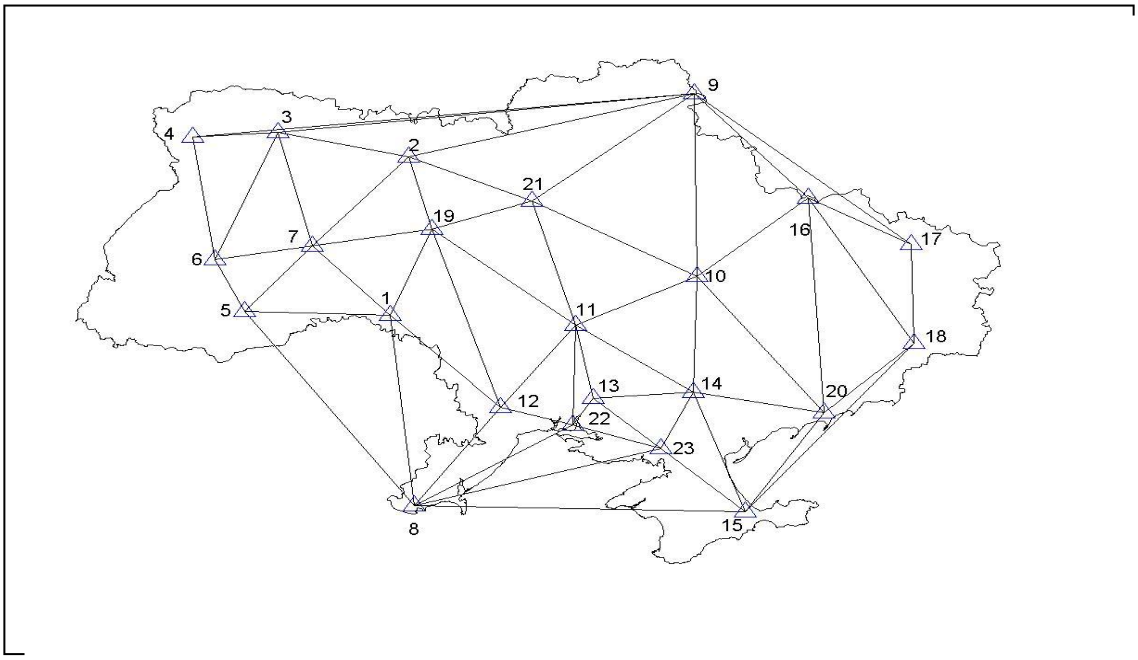

Схема поділу на скінченні елементи

Обраховано два варіанти визначення параметрів трансформування:

- перетворення за Гельмертом методом скінченних елементів;
- афінним трансформуванням методом скінченних елементів.

Перетворення за Гельмертом методом скінченних елементів виконувалось для кожного трикутника окремо. Для цього складались та вирішувались методом найменших квадратів рівняння конформного перетворення для чотирьох параметрів: x_0, y_0, θ, m, де θ — кут повороту системи координат UOV відносно системи XOY, m- масштабний коефіцієнт довжин ліній. Крім того, для аналізу результатів визначення параметрів трансформування додатково використовувались результати перетворення координат із державної геодезичної системи у систему WGS-84 методом Гельмерта, наведені у праці [8].

Оцінку точності, виконану по контрольних точках відображено у таблиці.

№ з/п	Метод трансформування	С.к.п. одиниці ваги μ (м)
1	Трансформування Гельмерта	0.638
2	Трансформування Гельмерта методом скінченних елементів	0.361
3	Афінне трансформування методом скінченних елементів	0.217

З результатів визначення параметрів трансформування видно, як, до речі, і очікувалось, що поділ на скінченні елементи та вирівнювання методом найменших квадратів трансформування за Гельмертом підвищило точність трансформування в 1.8 раза, а афінне трансформування методом скінченних елементів — в 3 рази.

Висновки. Використання афінного трансформування методом скінченних елементів ефективно вирішує проблему перетворення координат з однієї системи координат в іншу. У порівнянні з іншими методами це трансформування забезпечує вищу точність, оскільки локалізує спотворення геодезичних мереж, заданих менш точними пунктами, при переході до системи координат, заданої більш точними пунктами. Треба відзначити, що запропонований метод ефективно реалізується в програмних комплексах[11], в яких для заданої точки визначається її належність для конкретного скінченого елемента – трикутника, і використовуються відповідні параметри трансформування. Крім того, саме використання цього методу дозволяє перейти від TIN – моделі до GRID – моделі, сформувавши параметри трансформування для номенклатури карт будь якого масштабу. В багатьох країнах саме цей метод трансформування координат, прийнято [9,10] як національний стандарт для переходу до при впровадженні нових національних систем відліку, заснованих на використанні високоточних GPS – вимірювань.

Література

1. *Алексашин Е.П., Ширенин А.М.* Метод и алгоритмы определения параметров преобразования между различными системами координат применительно к задачам обработки спутниковых измерений// Геодезия и картография. М., 2002. – №6. . – с. 4-26.
2. Глобальна система визначення місцеположення (GPS). Теорія і практика / Б. Гофман-Велленгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Колінз. Пер. З англ.. третього вид. під ред. Я. С. Яцківа. – Київ: Наук. думка. 1995.-380 с.
3. *Журкин И.Г., Непман Ю.М.* Методы вычислений в геодезии: Учеб. Пособие.-М.: Недра, 1988.-304 с.
4. *Карпінський Ю.О., Ляшенко А.А.* Орографічно - тріангуляційна цифрова модель рельєфу. // Вісник геодезії та картографії. – 2000. – №3.– С. 28-33.
5. *Карпінський Ю.О., Грачов О.Г.* Трансформування растрових моделей цифрових карт і планів // Вісник геодезії та картографії. – 2001. – №1.– С. 22-25.
6. *Карпінський Ю.О.* Скінченні елементи двовимірних полів // Інженерна геодезія. К., 2001. – Вип.45. – с. 86-90.
7. *Карпінський Ю.О.* Загальна схема вирівнювання геодезичних мереж методом скінченних елементів. // Вісник геодезії та картографії. – 2002. – №1.– С. 20-25.
8. *Кучер О.В., Заєць І.М., Стопхай Ю.А., Сенкевич О.В.*Перетворення координат із державної геодезичної системи у світову систему WGS-84// Вісник геодезії та картографії. – 2002. – №3.– С. 8-14.
9. *Greaves M., Gruddace P.* The Adoption of ETRS89 as the National Mapping System for GB, via a Permanent GPS Network and Definitive Transformation// Improvements and Extension of EUREF / Adoptions of ETRS89
10. *Plazibat M.* Affine transformation by finite elements. Adaptable connection between old and new national reference systems// Scientific report. ETH – Institute of Geodesy and Photogrammetry, Zurich, 2001- 6c.
11. *Plazibat M., Carosio A.* FINELTRA: Software for the Linear Transformation with Finite Elements. Bernese GPS Software. www.gis.ethz.ch/research/far/far_fineltra.htm.

Ю.А. Карпинский

АФИННОЕ ТРАНСФОРМИРОВАНИЕ КООРДИНАТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

Рассматривается применение аффинного трансформирования координат методом конечных элементов. Приводится разработанная методика применения трансформирования координат в пространстве и на плоскости. Отмечается, что по сравнению с другими известными методами преобразования координат: (Гельмерта, множественной регрессии), приведенный метод обеспечивает более высокую точность определения параметров преобразования, локализует деформацию геодезических сетей, заданных менее точными пунктами при переходе в систему координат, заданную более точными пунктами. Отмечается эффективность применения этого метода при внедрении новых национальных геодезических систем отсчета, основанных на применении высокоточных GPS-измерений.

Application of affine transformation of coordinates by finite elements method is considered. The developed technique of application of transformation of coordinates in 3-dimension. It is marked, that in comparison with other known methods of transformation of coordinates: (Helmert, plural regress), the resulted method provides higher accuracy of definition of parameters of transformation, locates deformation of the geodetic networks set by less accuracy points at transition in system of coordinates, set by more accuracy points. Efficiency of application of this method is marked at introduction of new national geodetic reference systems based on application of precision GPS-measurements.

Y. Karpinskyy

AFFINE TRANSFORMATION BY FINITE ELEMENTS METHOD

S u m m a r y

Considered the Question using affine transforming the coordinates by the Finite Elements Method. Happens To a develop strategy of using a transforming the coordinates in the 3 dimension. Noted that in contrast with other known methods of transformation of coordinates: Helmert, plural regression, brought method ensures more pinpoint accuracy of determination of parameters of transformation, will localize a deforming the geodetic networks, given less accuracy points when turning in the coordinate system, given more accuracy points. Noted efficiency of using this method when introducing the new national geodetic reference systems, based on using precise GPS-measurements.

Науково-дослідний інститут
геодезії і картографії
Тел.: (044) 227-06-84, 227-36-85
Факс: (044) 227-42-52
E-mail:karp@gki.com.ua

Надійшла 05.12.02