УДК 528.14/16 *Ю.О. Карпінський*

# НЕЛІНІЙНЕ ВИРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Вступ.** За останні 15 років у сфері застосування нових інформаційних технологій збору та використання географічних даних пройдено шлях від автоматизації окремих процесів топографо-геодезичного виробництва до створення систем геоінформаційного картографування. Використання цифрових методів геодезичних вимірювань, які ґрунтуються на застосуванні глобальних супутникових радіонавігаційних систем GPS або електронних теодолітів і тахеометрів спричинило виникнення нових схем та методів побудови геодезичних мереж. Саме топографічне знімання у вигляді застосування методів блочної тахеометрії, або вільного станціонування [5], наблизилось до побудови мереж, а уніфікація обмінних форматів результатів вимірювань сприяє сумісному математичному опрацюванню різнорідних вимірювань. Тому прискорення науково-технічного прогресу в питаннях вирівнювання геодезичних вимірювань є актуальним завданням топографо-геодезичного виробництва.

Сучасним машинно-орієнтованим засобом вирівнювання результатів геодезичних вимірювань, який використовується в більшості програмно-методичних комплексів, є параметричний метод, а в деяких випадках — узагальнений метод вирівнювання у вигляді параметричного методу з додатковими умовами [7].

Важливим моментом у процесі вирівнювання є забезпечення лінеаризації параметричних рівнянь зв'язку. Розглянемо його докладніше. Позначимо: $X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \dots & X_k\end{pmatrix}^T$ — вектор точних значень параметрів; $Y=\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n\end{pmatrix}^T$ — вектор істинних значень виміряних величин; $y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_n\end{pmatrix}^T$ — вектор виміряних значень з відомою кореляційною матрицею $K_y=\sigma_0^2 P^{-1}$. Між векторами $Y$ та $X$ існує певна функціональна залежність:

$$Y=\varphi(X)\,. \tag{1}$$

Система рівнянь (1) є перевизначеною, через те що кількість вимірювань та відповідних параметричних рівнянь зв'язку більша за кількість невідомих параметрів, тобто $n \succ k$. Враховуючи, що для геодезичних мереж функції $Y=\varphi(X)$ є нелінійними, для вирішення задачі вирівнювання проводиться лінеаризація шляхом розкладення їх у ряд Тейлора:

$$Y_i=\varphi_i\begin{pmatrix}X_1^0 & X_2^0 & \dots & X_k^0\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d\varphi_i}{dX_j}\right)_0\left(X_j-X_j^0\right)+R_i\,, \tag{2}$$

де $X_j^0$ — наближене значення невідомого параметра $X_j$; $R_i$— нелінійні коефіцієнти в ряду Тейлора.

Опускаючи відомий процес перетворень параметричного способу зазначу, що рішення за методом найменших квадратів $\Phi = V^T PV = \min$ приводить до розв'язання системи нормальних рівнянь:

$$A^T PA\delta x - A^T PL = 0\,; \tag{3}$$

де $A(X) = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dX_1} & \frac{d\varphi_1}{dX_2} & \cdots & \frac{d\varphi_1}{dX_k} \\ \frac{d\varphi_2}{dX_1} & \frac{d\varphi_2}{dX_2} & \cdots & \frac{d\varphi_2}{dX_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dX_1} & \frac{d\varphi_n}{dX_2} & \cdots & \frac{d\varphi_n}{dX_k} \end{pmatrix} = \left(\frac{d\varphi(X)}{dX}\right)_0$ — матриця коефіцієнтів рівнянь поправок, причому всі похідні взято по $X_j$, але обчислено їх при $X_j^0$: $P$ — вагова матриця: $L = (l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n)^T$ — вектор вільних членів рівнянь поправок (тут $l_i = \varphi_i(X^0) - y_i$); $V = (v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n)^T$ — вектор поправок в результати вимірювань $y$: $\delta x = (\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \ldots \quad \delta x_k)^T$ — вектор поправок до вектора наближених значень невідомих параметрів $X^0$, (тут $\delta x_j = X_j^{вир} - X_j^0$); $X_j^{вир} = (X_1^{вир} \quad X_2^{вир} \quad \ldots \quad X_k^{вир})^T$ — вектор вирівняних параметрів.

Наближені значення $X^0$ параметрів $X$ потрібно визначати з такою точністю, щоби можна було знехтувати коефіцієнтами $R_i$. Але забезпечити цю вимогу для високоточних або великих мереж з різнорідними лінійними та кутовими вимірами досить складно. Саме це й спричинило виникнення напряму досліджень особливостей вирівнювання геодезичних мереж за умов нелінійності [7].

**Загальне рішення нелінійних задач вирівнювання геодезичних мереж.** Основна ідея методу полягає в тому, що нелінійна система для визначення невідомих параметрів розглядається як умова мінімуму функціонала:

$$F(X^{вр}) = (\varphi(X^{вр}) - y)^T P(\varphi(X^{вр}) - y). \tag{4}$$

Цей функціонал відповідає методу найменших квадратів, але треба зазначити, що на відміну від квадратичної форми $\Phi = V^T PV$ поправки до виміряних величин не зазнали лінеаризації параметричних рівнянь зв'язку. Для мінімізації функціонала $F$ треба обчислити його похідні по $X^{вр}$ та прирівняти їх до 0:

$$B(X^{вр})z = (\varphi(X^{вр}) - y)^T PA(X^{вр})z = 0\,, \tag{5}$$

де $z$ — довільний вектор. Рівняння (5) запишемо у дещо іншому вигляді:

$$B(X^{вр})z = (\varphi(X^{вр}) - \varphi(X^0) + L)^T PA(X^{вр})z = 0\,. \tag{6}$$

Очевидно, якщо врахувати виконану лінеаризацію (2) то вираз (6) перетвориться на рівняння (3). Якщо лінеаризацію не виконувати, то система (6) лишиться системою нелінійних рівнянь. До речі, існує велика кількість методів розв'язання системи нелінійних рівнянь, зокрема: метод ітерацій, метод Ньютона [2], а також метод диференціювання за параметром Бернштейна – Давиденко [1,2,6]. Якщо для сходимості методу ітерацій та методу Ньютона потрібно, щоб початкові значення $X^0$ були близькими до точних значень $X^{вр}$ , то метод диференціювання за параметром не має такого обмеження. Введемо скаляр $\lambda$, причому $0 \le \lambda \le 1$, і розглянемо рівняння (6) у такому вигляді:

$$\left(\varphi(X(\lambda)) - \varphi\left(X^0\right) + \lambda L\right)^T PA(X(\lambda))z = 0. \tag{7}$$

Очевидно, що $X(0) = X^0$, $X(1) = X^{вр}$. Якщо продиференціювати (7) за $\lambda$, то отримаємо:

$$\left(A(X(\lambda))\frac{dX(\lambda)}{d\lambda} + L\right)^T PA(X(\lambda))z + \left(\varphi(X(\lambda)) - \varphi\left(X^0\right) + \lambda L\right)^T P\frac{dA}{dX}(X(\lambda))\left(\frac{dX}{d\lambda}, z\right) = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) вирішується методом скінченних різниць за схемою Ейлера. Нехай

$$\begin{cases} 0 = \lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{M-1} < \lambda_M = 1; \\ \Delta\lambda_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m; \\ X_m = X(\lambda_m); \\ \Delta X_m = X_{m+1} - X_m, \end{cases} \tag{9}$$

де $M$ — кількість кроків; $m = 0,1,...M - 1$

Згідно з методом скінченних різниць, замінимо похідну $\frac{dX(\lambda_m)}{d\lambda}$ наближеним виразом $\frac{\Delta X_m}{\Delta\lambda_m}$. В результаті з врахуванням (8) отримаємо:

$$\left(A(X_m)\Delta X_m + \Delta\lambda_m L\right)^T PA(X_m)z + \left(\varphi(X_m) - \varphi\left(X^0\right) + \lambda_m L\right)^T P\frac{dA}{dX}(X_m)(\Delta X_m, z) = 0. \tag{10}$$

Унаслідок Після послідовного розв'язання рівнянь (10) в інтервалі зміни $\lambda$ від 0 до 1 отримаємо вектор $X_M$, який є найближчим розв'язком рівняння (6), тобто розв'язком задачі не лінійності при вирівнюванні геодезичних мереж.

**Нелінійне вирівнювання просторових мереж методом скінченних елементів**. Проілюструємо це на прикладі просторових ліній. У цьому випадку в просторовій системі координат позначимо: $X_1^0$, $X_2^0$ — вектори наближених координат початку та кінця просторової лінії $1-2$; $X_1$, $X_2$ — вектори вирівняних координат початку та кінця просторової лінії $1-2$. Приймемо: $x^0 = X_2^0 - X_1^0$; $x = X_2 - X_1$; норма $\|x\|$ — довжина вектора $X$: $(x,z)$— скалярний добуток векторів $x,z$. Врахуємо, що $\|x\|^2 = (x,x)$. Тоді

$$\varphi(X) = \|x\|, \tag{11}$$

і функціонал (4) набуває вигляду:

$$F(X)=P(\|x\|-y)^2 . \tag{12}$$

З урахуванням відомих співвідношень

$$\frac{d(\|x\|)}{dx}z=\frac{(x,z)}{\|x\|}; \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)z=\frac{z\|x\|^2-x(x,z)}{\|x\|^3} \tag{14}$$

вирази (6) та (10) набувають вигляду:

$$B(x)z=P(\|x\|-\|x^0\|+l)\frac{(x,z)}{\|x\|}; \tag{15}$$

$$P\left[\left(\frac{(x_m,\Delta x_m)}{\|x_m\|}+\Delta\lambda_m l\right)\frac{(x_m,z)}{\|x_m\|}\right]+N_m\frac{(\Delta x_m,z)\|x_m\|^2-(x_m,\Delta x_m)(x_m,z)}{\|x_m\|^2}=0, \tag{16}$$

де $N_m=\dfrac{P(\|x_m\|-\|x^0\|+\lambda_m l)}{\|x_m\|}$.

Оскільки вектор $a-\dfrac{b(a,b)}{\|b\|^2}$ є ортогональним до вектора $b$, а $\dfrac{(a,b)}{\|b\|}$ — це проекція вектора $a$ на вектор $b$, то з виразу (16) отримаємо матрицю жорсткості та вектор правих частин у локальній системі координат, пов'язані з виміряною лінією в порядку $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2$:

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & N_m & 0 & 0 & -N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & -N_m \\ -P & 0 & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & -N_m & 0 & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & -N_m & 0 & 0 & N_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\Delta\lambda_m Pl \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\lambda_m Pl \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Якби була виконана лінеаризація функціонала (12), то в цій матриці $N_m$ дорівнювало б нулю.

Запропонований підхід значно розширює можливості використання методу скінченних елементів при обробці геодезичних мереж, описаному в праці [4], та має ряд переваг над ітераційним процесом, який розглядається в [7]. По-перше, його реалізація не потребує високої точності наближених значень координат невідомих параметрів, по - друге, він має значно вищу збіжність результатів [1,2,6]. Цікаво, що побудований нелінійний скінченний елемент просторової виміряної лінії в геодезичній мережі має повну аналогію з нелінійним скінченним елементом просторової нитки у будівельній механіці. Метод диференціювання за параметром у будівельній механіці відомий як кроковий. Його реалізовано, наприклад, у програмно-методичному комплексі ЛІРА (ДНДІАСБ), призначеному для розрахунків міцності будівельних конструкцій за методом скінченних елементів

**Література**


1. *Давиденко Д.Ф.* Об одном методе численного решения систем нелинейных уравнений. — ДАН СССР, 1953.—Вып. 88.— №4.—С. 64-71.
2. *Давиденко Д.Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений. Украинский математический журнал.—1955.—Вып. 7, №1, С. 39-48.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Наука. М., 1977, 741 с.
4. *Карпінський Ю.О.* Загальна схема вирівнювання геодезичних мереж методом скінченних елементів. // Вісник геодезії та картографії. – 2002. – №1.– С. 20-25.
5. *Карпинский Ю.А., Гордышев С. И.* Горизонтальная съемка застроенных территорий методом блочной тахеометрии // Инженерная геодезия. – 1991 – Вып. 34. –С. 59-61.
6. *Приближенное* решение операторных уравнений./ М.А. Красносельский,. Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др.— М.: Наука, 1969.— 455 с.
7. *Маркузе Ю.И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. – М.: Недра, 1982.–191 с


---


*Ю.А. Карпинский*


**НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**


Р е з ю м е

Рассматривается вопрос нелинейного уравнивания геодезических сетей. Предлагается метод уравнивания в нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов и метода дифференцирования по параметру. Отмечается, что предлагаемый метод обладает лучшей сходимостью результатов. Устанавливается аналогия с методами и алгоритмами строительной механики.



*Y. Karpinskyy*


**NONLINEAR ADJUSTMENT OF GEODETIC MEASUREMENTS BY THE FINITE ELEMENTS METHOD**


S u m m a r y

Considered nonlinear adjustment of the geodetic networks. Offered method of nonlinear adjustment with using a finite elements method and method of differentiation on the parameter. Noted that proposed method possesses the best convergence. Set Analogy Up With methods and algorithms of structural mechanics



Науково-дослідний інститут
геодезії і картографії
Тел.: (044) 227-06-84, 227-36-85
Факс: (044) 227-42-52
E-mail:karp@gki.com.ua



Надійшла 10.05.02