УДК 528.14/16 *Ю.О. Карпінський*

ЗАГАЛЬНА СХЕМА ВИРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Вступ. Історія методу скінченних елементів налічує кілька десятиліть. Свій розвиток цей метод отримав як ефективний інструментарій для розв'язання класичних задач будівельної механіки, а тому він застосовувався, в основному, в цій галузі. В будівельній механіці цим методом мінімізується потенційна енергія, що дозволяє звести задачу розрахунку міцності будівельних конструкцій до вирішення системи лінійних рівнянь рівноваги. Зв'язок методу скінченних елементів з процесом мінімізації деякого функціонала спричинив широке використання його при вирішенні інших наукових та інженерних задач. Його застосовують і до рішення задач теорій пружності та розповсюдження тепла, в гідромеханіці.

Сфера застосування методу скінченних елементів значно розширилась, коли було доведено, що рівняння, за якими визначають елементи в будівельній механіці, в теорії розповсюдження тепла, в гідромеханіці, можуть бути отримані за допомогою таких варіантів методу зважених нев'язок, як метод Гальоркіна або метод найменших квадратів. Встановлення цього факту відіграло важливу роль в теоретичному обґрунтуванні методу скінченних елементів, тому що дозволило застосовувати його для рішення диференціальних рівнянь [1-4].

Уперше процедуру розрахунку за методом скінченних елементів для вирівнювання геодезичних мереж застосував N.F. Danial [5, с. 73-93], [6, с.11-27]. Характерно, що в своїх дослідженнях Danial обмежився розглядом тільки мереж трилатерації, встановивши аналогію між виміряною лінією та стрижнем з шарнірними вузлами, в яких можливі тільки лінійні переміщення.

Треба зазначити, що термін "скінченний елемент " має два значення. З одного боку, він відображує сітковий характер методу, який пов'язаний з розчленуванням неперервної області на скінченні елементи з можливістю граничного переходу при необмеженому зменшенні розміру елемента. З іншого боку, він вказує, що елемент має скінченне число степенів вільності, а його стан має скінченне число параметрів. Тому метод скінченних елементів можна розглядати або як варіаційно-різницевий метод рішення задач континуальних областей, або як метод побудови та дослідження дискретних областей фіксованих елементів зі скінченним числом степенів вільності [7].

Основна концепція методу скінченних елементів. Головна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що будь-яку неперервну (континуальну) величину можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченному числі підобластей. Для цього в досліджуваній області фіксується скінченне число вузлів. Значення неперервної величини в кожній вузловій точці вважається величиною змінною. Область визначення неперервної величини розчленовується на скінченне число елементів. Ці елементи мають загальні вузлові точки та в сукупності апроксимують форму області. Неперервна величина апроксимується на кожному елементі, наприклад, поліномами, які визначають за допомогою вузлових значень цієї величини. Для кожного елемента визначається свій поліном таким чином, щоби зберегти неперервність величини вздовж границь елемента [3].

Схема рішення континуальних задач методом скінченних елементів. Рішення задач методом скінченних елементів поділяється на два етапи. На першому етапі виконується побудова *матриці жорсткості скінченного елемента*, а на другому –складання та розрахунок системи нормальних рівнянь. Поняття “матриця жорсткості скінченного елемента” запозичено з будівельної механіки.

Якщо встановити аналогію з поняттями математичної обробки геодезичних вимірювань, то йому відповідає поняття “елементарне нормальне рівняння”. Застосування поняття “матриця жорсткості скінченного елемента” також доцільне, оскільки воно, як це буде показано в подальшому, характеризує геометричну жорсткість геодезичної побудови. Для побудови матриці жорсткості, яка повністю визначає геометричні параметри скінченного елемента, витримується така послідовність операцій:

1) побудова континуального (неперервного) функціонала на області Ω;
2) розчленування області Ω на ряд неперетинних підобластей $\Omega_i \in \Omega$;
3) вибір базисних функцій;
4) дискретизація континуального функціонала з використанням базисних функцій;
5) лінеаризація дискретного функціонала;
6) мінімізація лінеаризованого дискретного функціонала;
7) побудова матриці жорсткості та вектора правих частин скінченного елемента.

До речі, послідовність виконання операцій 4, 5 та 6 можна змінювати. Очевидно, що сукупність виміряних величин визначає підобласті $\Omega_i \in \Omega$ фіксованих елементів, тому операція 2 (розчленування) для геодезичних мереж забезпечена.

Перший етап пов’язаний з побудовою нових скінченних елементів. Вихідним елементом цього етапу є матриця жорсткості. В ході розробки цієї матриці, формується бібліотека скінченних елементів. Якщо в бібліотеці вже є матриці жорсткості скінченних елементів, на які розчленовується область Ω, то перший етап пропускається.

Другий етап складається з таких операцій:

1) побудова системи нормальних рівнянь;
2) рішення системи нормальних рівнянь;
3) визначення компонентів стану системи.

Другий етап являє собою безпосередній розрахунок системи.

Побудова функціонала. Базисні функції. Розглянемо використання методу скінченних елементів на прикладі рішення задач вирівнювання напрямів у мережах тріангуляції на площині. Взагалі для планових мереж тріангуляції кожному визначуваному пункту відповідають три степені вільності: координати *x, y* та орієнтирний кут θ.

Рівняння для виміряного напряму $N'_{1,2}$, що відраховується від нульового діаметра лімба, має такий вигляд:

$$N'_{1,2} = \alpha^0_{1,2} - \theta^0 , \tag{1}$$

в якому наближене значення дирекційного кута $\alpha^0_{1,2}$ визначається за попередніми значеннями координат $x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2$ пунктів: $\alpha^0_{1,2} = \mathrm{arctg}\dfrac{y^0_2 - y^0_1}{x^0_2 - x^0_1}$; θ^0 – наближене значення орієнтирного кута. Виміряний напрям можна подати у вигляді фізичного одномірного поля [8]. Довжина $s^0_{1,2}$ цієї лінії, визначеної за попередніми координатами $x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2$ пунктів 1 і 2, складає:

$$s^0_{1,2} = \sqrt{(x^0_2 - x^0_1)^2 + (y^0_2 - y^0_1)^2} .$$

Розрахунки за методом скінченних елементів можуть бути значно спрощені, якщо інтерполяційні співвідношення будувати в локальній системі координат, зв'язаної зі скінченним елементом. У випадку одномірних скінченних елементів, яким є виміряний напрям, доцільно ввести локальну систему координат uov, в якій вісь ov збігається з виміряним напрямом. Перетворення координат з локальної системи координат uov в глобальну XOY відбувається в ході побудови матриці жорсткості всієї системи.

Позначимо базисні функції для виміряного напряму $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$. Апроксимація базисними функціями одномірного скінченного елемента має такий вигляд:

$$u(t) = u_1\varphi_1(t) + u_2\varphi_2(t)\,, \tag{2}$$

де $u(t)$ – функція, яка має бути апроксимована; t – поточна координата $0 \le t \le s^0_{1,2}$; $u_1 = u(0)$, $u_2 = u(s^0_{1,2})$ – значення функції $u(t)$ на початку та на кінці лінії.

У випадку апроксимації координат x, y базисні функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ виглядають так:

$$\varphi_1(t) = 1 - \frac{t}{s^0_{1,2}}\,; \qquad \varphi_2(t) = \frac{t}{s^0_{1,2}}\,. \tag{3}$$

З урахуванням (3) вираз (2) набуває такого вигляду:

$$x(t) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{s^0_{1,2}}\,t\,; \qquad y(t) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{s^0_{1,2}}\,t\,. \tag{4}$$

У випадку апроксимації орієнтирного кута θ базисні функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ записуємо так:

$$\varphi_1 t) = \begin{cases} 1 \quad при \quad 0 \le t \le \dfrac{s^0_{1,2}}{2} \\ 0 \quad при \quad \dfrac{s^0_{1,2}}{2}\ \pi\ t \le s^0_{1,2}; \end{cases} \qquad \varphi_2 t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad 0 \le t \le \dfrac{s^0_{1,2}}{2} \\ 1 \quad при \quad \dfrac{s^0_{1,2}}{2}\ \pi\ t \le s^0_{1,2} \end{cases} \tag{5}$$

З урахуванням (5) вираз (2) трансформується так:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_1 \quad при \quad 0 \le t \le \dfrac{s^0_{1,2}}{2} \\ \theta_2 \quad при \quad \dfrac{s^0_{1,2}}{2}\ \pi\ t \le s^0_{1,2}. \end{cases} \tag{6}$$

Функціонал виміряного напряму $1 - 2$ можна представити у вигляді:

$$F(x,y,\theta(= \frac{p_\beta}{2s^0_{1,2}} \int_0^{s^0} \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{d}{dt}\left[y^0(t) + y(t)\right]}{\frac{d}{dt}\left[x^0(t) + x(t)\right]} - \theta^0(t) - N'_{1,2} + \theta(t) \right]^2 dt\,, \tag{7}$$

де p_β – вага кутового виміру.

Дискретизація континуального функціонала. Далі виконується дискретизація функціонала (7). Позначимо:

$$x_2^0 - x_1^0 = \Delta x^0\,;\; y_2^0 - y_1^0 = \Delta y^0\,;\; x_2 - x_1 = \Delta x\;\;;\; y_2 - y_1 = \Delta y \tag{8}$$

та

$$\alpha_{1,2}^0 = \theta_1^0 + N_{1,2}'\,;\quad \alpha_{2,1}^0 = \theta_2^0 + N_{2,1}'\,. \tag{9}$$

Якщо продиференціювати вираз (4) за перемінною t, то з урахуванням (8) можна отримати:

$$\frac{d}{dt}\left[x^0(t) + x(t)\right] = \frac{\Delta x^0 + \Delta x}{s_{1,2}^0}\,,\qquad \frac{d}{dt}\left[y^0(t) + y(t)\right] = \frac{\Delta y^0 + \Delta y}{s_{1,2}^0}\,. \tag{10}$$

Виконавши інтегрування виразу (7) з урахуванням (6) та (10), отримаємо дискретний функціонал:

$$F(x,y,\theta(= \frac{p_\beta}{2}\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0 + \Delta y}{\Delta x^0 + \Delta x} + \theta_1 - \alpha_{1,2}^0\right)^2 + \left(\operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0 + \Delta y}{\Delta x^0 + \Delta x} + \theta_2 - \alpha_{2,1}^0\right)^2\right]. \tag{11}$$

Лінеаризація дискретного функціонала. Виконуючи лінеаризацію функціонала (11), позначимо:

$$l_1 = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} - \alpha_{1,2}^0\,;\qquad l_2 = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} - \alpha_{2,1}^0\,. \tag{12}$$

З урахуванням (12) вираз (11) набуває вигляду:

$$F(x,y,\theta(= \frac{p_\beta}{2}\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0 + \Delta y}{\Delta x^0 + \Delta x} - \operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} + \theta_1 + l_1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0 + \Delta y}{\Delta x^0 + \Delta x} - \operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} + \theta_2 + l_2\right)^2\right]. \tag{13}$$

З урахуванням (8) маємо:

$$\operatorname{arctg}\frac{\Delta^0 y + \Delta y}{\Delta^0 x + \Delta x} - \operatorname{arctg}\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} = \frac{\Delta x^0 \Delta y - \Delta y^0 \Delta x}{\left(s_{1,2}^0\right)^2}\,. \tag{14}$$

У цьому виразі

$$\frac{\Delta x^0 \Delta y - \Delta y^0 \Delta x}{\left(s_{1,2}^0\right)^2} = \Delta u = u_2 - u_1\,, \tag{15}$$

де uov – локальна система координат.

З урахуванням (13), (14) та (15) функціонал (11) перетворюється на квадратичний:

$$F(x,y,\theta(= \frac{p_\beta}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{s_{1,2}^0} + \theta_1 + l_1\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{s_{1,2}^0} + \theta_2 + l_2\right)^2\right]. \tag{16}$$

Мінімізація лінеаризованого дискретного функціонала. Для мінімізації квадратичного функціонала (16) визначаються похідні від усіх перемінних, які прирівнюються до нуля. В результаті отримуємо варіаційне рівняння:

$$p_\beta\left[\left(\frac{\Delta u}{s_{1,2}^0} + \theta_1 + l_1\right)\left(\frac{du}{s_{1,2}^0} + d\theta_1\right) + \left(\frac{\Delta u}{s_{1,2}^0} + \theta_2 + l_2\right)\left(\frac{du}{s_{1,2}^0} + d\theta_2\right)\right] = 0\,, \tag{17}$$

де $\Delta u = u_2 - u_1$; $du = du_2 - du_1$; du_1, du_2, $d\theta_1$, $d\theta_2$ – довільні величини.

Виконавши множення у виразі (17), отримаємо матрицю жорсткості виміряного напряму та вектор правих частин у локальній системі координат:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2p_\beta}{s^2} & -\frac{p_\beta}{s} & 0 & -\frac{2p_\beta}{s^2} & -\frac{p_\beta}{s} \\ 0 & -\frac{p_\beta}{s} & p_\beta & 0 & \frac{p_\beta}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2p_\beta}{s^2} & \frac{p_\beta}{s} & 0 & \frac{2p_\beta}{s^2} & \frac{p_\beta}{s} \\ 0 & -\frac{p_\beta}{s} & 0 & 0 & \frac{p_\beta}{s} & p_\beta \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Вектор вільних членів у локальній системі координат має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{p_\beta(l_1 + l_2)}{s} & -p_\beta l_\beta & 0 & -\frac{p_\beta(l_1 + l_2)}{s} & -p_\beta l_\beta \end{pmatrix}^T. \tag{19}$$

Якщо при виведенні (18) та (19) використати лінійну апроксимацію (3), а не кусково-постійну функцію (5), то отримаємо таку матрицю жорсткості:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2p_\beta}{s^2} & -\frac{p_\beta}{s} & 0 & -\frac{2p_\beta}{s^2} & -\frac{p_\beta}{s} \\ 0 & -\frac{p_\beta}{s} & \frac{2p_\beta}{3} & 0 & \frac{p_\beta}{s} & \frac{p_\beta}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2p_\beta}{s^2} & \frac{p_\beta}{s} & 0 & \frac{2p_\beta}{s^2} & \frac{p_\beta}{s} \\ 0 & -\frac{p_\beta}{s} & \frac{p_\beta}{3} & 0 & \frac{p_\beta}{s} & \frac{2p_\beta}{3} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Присутність ненульового елемента $\frac{p_\beta}{3}$ у матриці (20) вказує на зв’язок між орієнтирними кутами на точках 1 та 2. Очевидно, що за змістом кутового напряму такого зв’язку не може бути, тому для апроксимації використано кусково-постійну функцію (5).

Матрицю жорсткості виміряного напряму можна також отримати з параметричного способу вирівнювання геодезичних мереж. Так, якщо позначити рядок матриці коефіцієнтів рівнянь поправок A, що відповідає i-му вимірюванню, через a_i, то можна утворити елементарне нормальне рівняння:

$$r_1 = a_i^T p_\beta a_i \,. \qquad (21)$$

Виконавши перемноження у виразі (21) у локальній системі координат uov, де вісь ov збігається з виміряним напрямом, отримаємо матрицю жорсткості скінченного елемента виміряного напряму [10]. Якщо утворити скінченний елемент прямого та оберненого напряму, то

$$r_{1-2} = a_{1-2}^T p_\beta a_{1-2} + a_{1-2}^T p_\beta a_{1-2} \,.$$

В результаті буде отримано матрицю жорсткості (18).

Побудова системи нормальних рівнянь. В ході побудови системи нормальних рівнянь всієї мережі тріангуляції необхідно провести перетворення матриці жорсткості з локальної системи координат uov в глобальну систему XOY . Це перетворення виконується за формулою

$$R_i = K_i^T r_i K_i \,, \qquad (22)$$

де r_i – матриця жорсткості i–го виміряного елемента, K_i – матриця напрямних косинусів, яка виконує перетворення з локальної системи координат у глобальну. Як правило, перехід від локальної до глобальної систем координат виконується одночасно зі складанням матриці жорсткості всієї геодезичної мережі:

$$R = \sum_{i=1}^{m} K_i^T r_i K_i \,. \qquad (23)$$

Зв’язок між скінченними елементами геодезичних вимірів та скінченними елементами будівельних конструкцій. Геодезисти не раз відмічали схожість між методами розрахунку в будівельній механіці та методами обробки вимірів у геодезії. Так, ще у 50-ті роки XX ст. М.І. Товстоліс встановив аналогію між методом сил будівельної механіки та методом умов обробки геодезичних вимірів, що втілилося у його докторській дисертації на тему “Методи будівельної механіки стосовно рішення задач геодезії та маркшейдерії”. Інтенсивний розвиток засобів обчислювальної техніки для розрахунку міцності будівельних конструкцій спричинив перехід до використання методу переміщень. Аналогічно, розвиток методів вирівнювання геодезичних мереж пов’язаний з ефективним застосуванням параметричного методу.

Для встановлення аналогій між рівняннями геодезичних вимірів при параметричному вирівнюванні геодезичних мереж та рівняннями рівноваги будівельної механіки треба порівняти матриці жорсткості скінченних елементів геодезичних вимірів та будівельних конструкцій.

Матриця жорсткості скінченного елемента рамного стрижня з жорсткими вузлами виглядає так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s^3} & -\frac{6EI}{s^2} & 0 & -\frac{12EI}{s^3} & -\frac{6EI}{s^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{s^2} & \frac{4EI}{s} & 0 & \frac{6EI}{s^2} & \frac{2EI}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s^3} & \frac{6EI}{s^2} & 0 & \frac{12EI}{s^3} & \frac{6EI}{s^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{s^2} & \frac{2EI}{s} & 0 & \frac{6EI}{s^2} & \frac{4EI}{s} \end{pmatrix} \tag{24}$$

де E – модуль пружності, I – момент інерції. Порівнюючи матриці (20) та (24), можна встановити, що вони еквівалентні, причому $p_\beta = \frac{6EI}{s}$. На жорсткі вузли 1 та 2 цього стрижня діють вертикальні сили $f_1 = \frac{p_\beta (l_1 + l_2)}{s}$ і $f_2 = \frac{p_\beta (l_1 + l_2)}{s}$ та моменти $F_1 = F_2 = -p_\beta l_\beta$. Фізичну інтерпретацію цього рамного стрижня подано на малюнку.

Висновки. Метод скінченних елементів є ефективним числовим засобом рішення диференціальних рівнянь. Традиційно математична обробка результатів геодезичних вимірювань використовується для рішення задач вирівнювання й інтерполяції та апроксимації функцій. Очевидно, метод скінченних елементів може узагальнити весь спектр задач математичної обробки результатів геодезичних вимірювань та дозволяє об'єднати в одну обчислювальну процедуру задачі вирівнювання геодезичних мереж [9-12], обробки топографічних знімань, трансформування координат, побудови цифрових моделей рельєфу [13] тощо.

Так, використання одновимірних скінченних елементів забезпечує обробку будь-яких геодезичних мереж, включаючи сумісну обробку GPS та традиційних геодезичних мереж на площині та на еліпсоїді, обробку результатів блочної тахеометрії. Використання дво- та тривимірних скінченних елементів може ефективно вирішувати задачі добору параметрів трансформування з однієї системи координат в іншу, в тому числі для встановлення тісного зв'язку між впроваджуваною в Україні системою координат WGS-84 і системою координат СК-42 та похідними від них, трансформування растрових зображень, побудови цифрових моделей рельєфу.

Література

1. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ.- М.: Мир, 1982. – 304 с.
2. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. *Математика* и САПР: В 2-х кн. Кн. 1, Пер. с франц. / Шенен П., Коснар М., Гардан И., и др. – М.: Мир, 1988.-204 с.
5. *Danial N.F., Krauthammer T.* Trilateration adjustment by Finite elements. Surveying and Mapping. Journal of the surveying and mapping Division.– 1980,– № 166, 1,– p. 73-93.
6. *Danial N.F.,* Adjustment of Space trilateration by STRUDL. Surveying and Mapping. Journal of the surveying and mapping Division.– 1987, № 113, 1,– p. 11-27.
7. *Розин Л.А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. Л., Изд-во Ленингр. Ун-та, 1975, 237 с.
8. *Мазмишвили А.И.* Способ наименьших квадратов. – М.: Недра, 1968.–440 с.
9. *Карпинский Ю.А.* Вариационный принцип построения конечных элементов сетей трилатерации. //Инженерная геодезия. – 1992. – Вып.35.– С. 48-50.
10. *Карпінський Ю.О.* Вирівнювання геодезичних мереж тріангуляції методом скінченних елементів. //Інженерна геодезія. – 1999. – Вип. 41.– С. 65-73 .
11. *Карпінський Ю.О.* Скінченний елемент дирекційного кута при вирівнюванні геодезичних мереж в проекції Гаусса- Крюгера. //Інженерна геодезія. – 2000. – Вип. 42.– С. 61-65
12. *Карпінський Ю.О.* Скінченний елемент астрономічного азимуту в проекції Гаусса – Крюгера.// Інженерна геодезія. – 2000. – Вип. 43.– С. 76-79
13. *Карпінський Ю.О.* Скінченні елементи двовимірних геополів. // Інженерна геодезія. – 2001. – Вип. 45.– С. 86-90

Ю.А. Карпинский

ОБЩАЯ СХЕМА УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

Описывается обобщенная схема уравнивания геодезических сетей методом конечных элементов. Схема предусматривает построение непрерывного функционала, расчленение на непересекающиеся подобласти, выбор базисных функций, дискретизацию, линеаризацию и минимизацию квадратичного функционала. Вывод матрицы жесткости конечного элемента проиллюстрировано на примере сетей триангуляции. Показана аналогия между конечными элементами геодезических сетей и строительных конструкций.

U. Karpinskyy

GENERALIZED SCHEME OF GEODETIC NETWORK ADJUSTMENT BY THE FINITE ELEMENTS

S u m m a r y

Described generalized scheme of adjustment the geodetic networks by the Finite elements method. Scheme provides construction of continuous functional, partition on not crossed subareas, choice of base functions, digitization, linearization and quadratic functional minimization. Conclusion of a stiffness matrixes of Finite elements is illustrated on the example of triangulations. Shown analogy between geodetic network finite elements and building structure.

Науково-дослідний інститут
геодезії і картографії
Тел.: (044) 227-06-84, 227-36-85
Факс: (044) 227-42-52
E-mail:karp@gki.com.ua

Надійшла 16.01. 02